

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

И. о. проректора по УР

М. Х. Чанкаев

«30» апреля 2025 г., протокол № 8

Рабочая программа дисциплины

Действительный анализ

(наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

(шифр, название направления)

Направленность (профиль):

«Общий профиль: прикладная математика и информатика»

Квалификация выпускника

бакалавр

Форма обучения

очная

Год начала подготовки - **2023**

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Бостанов Р.А.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9 с изменениями и дополнениями от 26.11.2020 г., №1456, 8.02.2021 г., №83, на основании учебного плана подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль: «Общий профиль: прикладная математика и информатика», локальных актов КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры математического анализа на 2025-2026 учебный год, протокол **№ 8 от 28 апреля 2025г.**

Оглавление

1. Наименование дисциплины (модуля).....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся.....	5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.....	6
5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах).....	6
6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).....	10
7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций	10
7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания	11
7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины	11
7.3.1. Примерные вопросы к итоговой аттестации (экзамен).....	11
7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций.....	13
7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ	13
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины. Информационное обеспечение образовательного процесса.....	16
8.1. Основная литература:	16
8.2. Дополнительная литература:	16
9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)	16
9.1. Общесистемные требования	16
9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	17
9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.....	17
9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы	18
10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья	18
11. Лист регистрации изменений	19

1. Наименование дисциплины (модуля)

Действительный анализ

Цели освоения дисциплины:

- теоретическое и практическое освоение обучающимися основных разделов действительного анализа;
- освоения основных методов действительного анализа, применяемых в решении профессиональных задач и научно-исследовательской деятельности;
- овладение методами действительного анализа при моделировании с использованием современных математических методов.

Для достижения цели ставятся задачи:

- формирование представлений об основных понятиях и методах действительного анализа;
- сформировать умения доказывать теоремы действительного анализа;
- знать теорию множеств, строение некоторых видов множеств, элементы теории рядов Фурье и уметь применять для решения различных задач;
- знать теорию меры и интеграла Лебега;
- показать связи действительного анализа с математическим анализом и другими дисциплинами.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Действительный анализ» (Б1.В.ДВ.06.01) относится к блоку – «Блок 1. Дисциплины (модули)», к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 6 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП	
Индекс	Б1.В.ДВ.06.01
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь базовую подготовку по дисциплинам: «Математический анализ I», «Математический анализ II», «Математический анализ III», «Алгебра и аналитическая геометрия», «Функциональный анализ» в объёме вузовской программы бакалавриата.	
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «Действительный анализ», будут использоваться в дальнейшем при освоении дисциплины вариативной части «Краевые задачи и вариационное исчисление». Изучение дисциплины необходимо для успешного освоения дисциплин и практик, формирующих компетенции УК-1, ПК-2.	

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Действительный анализ» направлен на формирование следующих компетенций обучающегося:

Код компетенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ ОПВО	Индикаторы достижения компетенций
-----------------	---	-----------------------------------

УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3. Владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска
ПК-2	Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы. ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач. ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часов.

Объём дисциплины	Всего часов	Всего часов
	для очной формы обучения	для заочной формы обучения
Общая трудоемкость дисциплины	108	
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий)* (всего)		
Аудиторная работа (всего):	36	
в том числе:		
лекции	18	
семинары, практические занятия	18	
практикумы	Не предусмотрено	
лабораторные работы	Не предусмотрено	
Внеаудиторная работа:		
консультация перед зачетом		
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем), творческую работу (эссе), рефераты, контрольные работы и др.		
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	36	
Контроль самостоятельной работы	36	
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	экзамен	

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

Очная форма обучения

№ п/п	Курс /семес- тр	Раздел, тема дисциплины	Общая трудое- мкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)			
			Всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа
			108	Лек.	Пр.	Лаб.	
	3/6	Раздел 1. Мощность множества. Строение линейных множеств	28	6	8		14
1.	3/6	Понятие мощности множества. Эквивалентные множества. Счетные множества и их свойства. Счетные множества и их свойства. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел.	2		2		
2.	3/6	Основные сведения о множествах. Виды отображений. Непрерывные дроби. Двоичные дроби	6		2		4
3.	3/6	Отображения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Счетные множества и их свойства.	2		2		
4.	3/6	Несчетные множества. Несчетность множества \mathbb{R} . Множества мощности континуума. Мощность континуума как мощность множества подмножеств счетного множества.	2		2		
5.	3/6	Сравнение мощностей. Существование множеств с сколь угодно высокими мощностями.	2	2			
6.	3/6	Мощность множества. Счетные множества и их свойства. Примеры	2	2			
7.	3/6	Точечные множества. Замкнутые и открытые множества. Замкнутые множества и их свойства. Открытые множества и их свойства. Структура и строение открытых и замкнутых множеств на числовой прямой.	2				2
8.	3/6	Плотные и нигде не плотные множества	2	2			
9.	3/6	Точечные множества. Замкнутые и открытые множества. Замкнутые множества и их свойства. Открытые множества и их свойства. Структура и строение открытых и	2				2

		замкнутых множеств.					
10.	3/6	Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества	2				2
11.	3/6	Теорема Линделефа. Следствия.	2				2
12.	3/6	Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества.	2				2
	3/6	Раздел 2. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега	18	4	6		8
13.	3/6	Мера открытых и замкнутых множеств. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Множества измеримые по Лебегу. Свойства измеримых множеств. Измеримые функции.	2	2			
14.	3/6	Измеримость и мера как инварианты движения. Теоремы Егорова, Лузина.	4	2	2		
15.	3/6	Мера открытых и замкнутых множеств.	2				2
16.	3/6	Классы измеримых множеств. Структура измеримых функций.	2				2
17.	3/6	Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	2		2		
18.	3/6	Мера Жордана и Лебега.	2				2
19.	3/6	Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	2		2		
20.	3/6	Восстановление первообразной функции. Сравнение интегралов Римана и Лебега.	2				2
	3/6	Раздел 3. Суммируемые функции. Интеграл Стильеса	12	6	2		4
21.	3/6	Суммируемые функции. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Функции суммируемые с квадратом. Сходимость в среднем. Ортогональные системы.	2				2
22.	3/6	Предельный переход под знаком интеграла.	2	2			
23.	3/6	Полнота пространства Гильберта L_2 . Свойства. Пространство l_2 . Свойства.	2	2			
24.	3/6	Пространства L_p и l_p . Функции с конечным изменением. Интеграл Стильеса.	2				2
25.	3/6	Предельный переход под знаком интеграла Стильеса.	2	2			

26.	3/6	Функции суммируемые с квадратом. Пространство l_2 . Вычисление интеграла Стильбеса.	2		2		
	3/6	Раздел 4. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве	14	2	2		10
27.	3/6	Задача разложения в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортонормальным системам.	2				2
28.	3/6	Евклидово пространство. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.	4	2	2		
29.	3/6	Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление.	2				2
30.	3/6	Равенство Парсеваля. Разложение функций в ряд Фурье по четным и нечетным степеням. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Замкнутые и полные ортонормированные системы.	2				2
31.	3/6	Сходимость ряда Фурье. Разложение функций в ряд Фурье.	2				2
32.	3/6	Разложение функций в ряд Фурье по четным и нечетным степеням. Сходимость ряда Фурье.	2				2
		Контроль	36				
		ИТОГО:	108	18	18		36

6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы

Лекционные занятия. Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей программой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;

2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия. Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Образовательные технологии. При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы

студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций

Компетенции	Зачтено			Не зачтено
	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (до 55 % баллов)
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает все принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Знает основные принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Знает фрагментарно принципы сбора, отбора и обобщения информации
	УК-1.2. Умеет в полном объеме соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Частично умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Не умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности
	УК-1.3. В полном объеме владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска	УК-1.3. Владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска	УК-1.3. Частично владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска	УК-1.3. Не владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска
ПК-2: Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Полностью знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Знает принципы построения математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Не знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы
	ПК-2.2. Полностью умеет использовать и модифицировать	ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать	ПК-2.2. Умеет использовать существующие	ПК-2.2. Не умеет использовать и модифицировать

	существующие математические методы для решения прикладных задач	существующие математические методы для решения прикладных задач	математические методы для решения прикладных задач	существующие математические методы для решения прикладных задач
	ПК-2.3. Полностью владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Владеет основными навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. В целом владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Не владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод балльно-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводится в соответствии с положением КЧГУ «Положение о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: <https://kchgu.ru/inye-lokalnye-akty/>

7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.3.1. Примерные вопросы к итоговой аттестации (экзамен)

Билет №1

1. Отображения множеств. Виды отображений. Примеры.
2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Билет №2

1. Основные сведения о множествах. Операции над множествами. Примеры.
2. Пространства L_p и l_p . Примеры.

Билет №3

1. Понятие эквивалентности множеств. Примеры.
2. Пространство l_2 . Свойства.

Билет №4

1. Понятие мощности множеств. Примеры.
2. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Примеры.

Билет №5

1. Счетные множества и их свойства. Примеры.
2. Интеграл Стильеса. Свойства. Примеры.

Билет №6

1. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. Примеры.
2. Мера замкнутых множеств. Примеры.

Билет №7

1. Несчетность множества действительных чисел.

2. Измеримые функции. Примеры.

Билет №8

1. Множества мощности континуума. Примеры.

2. Сходимость ряда Фурье.

Билет №9

1. Мощность множества последовательностей действительных и натуральных чисел. Примеры.

2. Эквивалентные функции. Измеримость непрерывной функции. Примеры.

Билет №10

1. Мощность множества $C_{[a,b]}$.

2. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Примеры.

Билет №11

1. Мощность континуума как мощность множества подмножеств счетного множества. Примеры.

2. Свойства интеграла Лебега.

Билет №12

1. Сравнение мощностей. Примеры.

2. Суммируемые функции и их свойства. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Примеры.

Билет №13

1. Мощность множества всех вещественных функций.

2. Понятие об общем ряде Фурье. Равенство Парсеваля. Примеры.

Билет №14

1. Мощность множества подмножеств. Примеры.

2. Функции суммируемые с квадратом. Сходимость в среднем. Ортогональные системы. Примеры.

Билет №15

1. Замкнутые и открытые множества. Примеры.

2. Характеристическая функция. Свойства. Примеры.

Билет №16

1. Замкнутые множества и их свойства. Примеры.

2. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры.

Билет №17

1. Открытые множества и их свойства. Примеры.

2. Задача разложения функции в тригонометрический ряд. Примеры.

Билет №18

1. Структура и строение открытых множеств. Примеры.

2. Ортогональные системы функций. Примеры.

Билет №19

1. Структура и строение замкнутых множеств. Примеры.

2. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Примеры.

Билет №20

1. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Примеры.
2. Ряды Фурье по ортонормальным системам. Евклидово пространство. Примеры.

Билет №21

1. Понятие меры множества. Мера открытых множеств. Примеры.
2. Формулы Фурье для коэффициентов ряда. Примеры.

7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций

7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ

Раздел 1. «Мощность множества. Строение линейных множеств»

1. Какое отображение называется взаимнооднозначным соответствием?
2. Дайте определение равномощных множеств.
3. Существует ли множество, равномощное множеству натуральных чисел, не являющееся его собственным подмножеством?
4. Какие множества называются счетными? Приведите примеры счетных множеств.
5. Сформулируйте признаки счетности множеств.
6. Может ли объединение счетной совокупности счетных множеств быть конечным множеством?
7. Что означают слова «множество A имеет мощность континуума»?
8. Верно ли, что квадрат содержит больше точек, чем отрезок?
9. Какова мощность множества всех числовых последовательностей?
10. Доказать, что множество нечетных натуральных чисел и множество четных натуральных чисел равномощны.
11. Доказать, что множество положительных действительных чисел равномощно множеству отрицательных действительных чисел.
12. Доказать, что множество натуральных чисел равномощно множеству чисел, являющихся точными квадратами.
13. Доказать, что любые два интервала $(a;b)$ и $(c;d)$ равномощны.
15. Доказать, что отрезок $[a;b]$ и интервал $(a;b)$ равномощны.
16. Доказать, что любой круг равномощен любому квадрату.
17. Доказать, что множество точных квадратов натуральных чисел счетно.
18. Доказать, что множество целых чисел счетно.
19. Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.
20. Показать, что множество точек плоскости с рациональными абсциссами имеет мощность континуума.
21. Доказать, что множество всех точек плоскости имеет мощность континуума.
22. Дайте определение внутренней, внешней и граничной точек множества E из метрического пространства E .
23. Дайте определение границы множества.
24. Приведите примеры внутренних, внешних и граничных точек для различных фигур на плоскости.
25. Может ли граница множества быть пустой? Приведите примеры.

26. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Приведите примеры.
27. Приведите пример всюду плотного множества на отрезке $[0; 1]$, отличного от этого отрезка.
28. Перечислите свойства открытых и замкнутых множеств.
29. Докажите, что множество E открыто в M в том и только том случае, когда все его точки внутренние.
30. Пусть E – множество функций пространства $C[-1; 1]$ таких, что $f(x) \leq 1$ при $x \in [-1; 1]$. Показать, что функция $f_0(x) = 2x$ является внешней «точкой» для множества E .

Раздел 2. «Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега»

1. Дайте определение интеграла Римана. Приведите примеры интегрируемых и неинтегрируемых по Риману функций.
2. Дайте определение ступенчатой функции, приведите примеры.
3. Какая функция называется интегрируемой по Лебегу на отрезке? Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Риману, но не интегрируемую по Лебегу?
4. Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Лебегу, но не интегрируемую по Риману?
5. Какое множество называется измеримым по Лебегу? Какое число называется его мерой?
6. Докажите, что любой интервал $(a; b)$ измерим, и найдите его меру.
7. В чем заключается свойство счетной аддитивности меры?
8. Измеримость и мера как инварианты движения.
8. Приведите классы измеримых множеств. Их основные свойства.
9. Охарактеризуйте структуру измеримых функций.
10. Показать, что функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ иррациональном,} \\ 1 & \text{при } x \text{ рациональном} \end{cases}$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0; 1]$.
11. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0; 1), \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 1) \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, и найти ее интеграл.
12. Показать, что функция f такая, что $f(0) = 0$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \neq 0$ интегрируема на отрезке $[-1; 8]$, и найти ее интеграл.
13. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ интегрируема на \mathbb{R} , и найти ее интеграл.
14. Что такое характеристическая функция множества?
15. Дайте определение эквивалентных функций. Приведите примеры.
16. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина. Как доказываются эти теоремы?
17. В чем заключается предельный переход под знаком интеграла Лебега?
18. Как восстановить первообразную функции?
19. Какие действия можно производить над измеримыми функциями?
20. В чем смысл сходимости по мере и сходимости почти всюду (почти везде)? Их связь.

Раздел 3. «Суммируемые функции. Интеграл Стильеса»

1. Суммируемые функции. Определение. Примеры.
2. Интеграл от неотрицательной измеримой функции.
3. Функции суммируемые с квадратом.

4. Докажите аксиомы скалярного произведения для L_2 .
5. Сходимость в среднем. Ортогональные системы.
4. Полнота пространства Гильберта L_2 . Свойства.
5. Пространство l_2 . Свойства.
6. Пространства L_p и l_p . Дайте определения этих пространств.
7. Функции с конечным изменением. Интеграл Стильеса.
8. Предельный переход под знаком интеграла Стильеса.
9. В чем отличие интеграла Стильеса от интеграла Римана? Когда интеграл Стильеса превращается в интеграл Римана.
10. В чем заключается достаточное условие существования интеграла Стильеса?

Раздел 4. «Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве»

1. В чем заключена задача разложения в тригонометрический ряд.
2. Коэффициенты ряда Фурье. Формулы.
3. Как проверить ортогональность системы функций.
4. Какой вид имеет неравенство Бесселя для тригонометрической системы?
5. Как выглядит комплексная форма тригонометрического ряда Фурье?
6. Условия сходимости ряда Фурье.
7. Ряды Фурье по ортонормальным системам.
8. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.
9. Разложение функций в ряд Фурье по четным и нечетным степеням.
10. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x$, на интервале $(-\pi, \pi)$
11. Почему ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до π .
12. В разложении в ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} -2; & -\pi < x < 0 \\ 3; & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, на интервале $(-\pi, \pi)$ найти коэффициент a_0 .
13. Укажите, при каком значении l система функций $\left\{1, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[-2; 2]$:
14. Для тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$, $-\pi \leq x \leq \pi$, найдите формулы коэффициентов Фурье ($n = 1, 2, 3, \dots$).
15. Для тригонометрического ряда $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$, найдите формулы коэффициентов Фурье ($n = 1, 2, 3, \dots$).
16. Для тригонометрического ряда $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$, укажите верные формулы коэффициентов Фурье ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Критерии оценки устного ответа на вопросы по дисциплине «Действительный анализ»:

✓ 5 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного

содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 4 - балла - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 3 балла – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

2 балла – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины. Информационное обеспечение образовательного процесса

8.1. Основная литература:

1. Быкова, О. Н. Теория функций действительного переменного: учебное пособие / О.Н. Быкова, С.Ю. Колягин, Б.Н. Кукушкин Б. - М.: КУРС, ИНФРА-М, 2019. - 196 с. - ISBN 978-5-905554-21-6. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1027407> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.

8.2. Дополнительная литература:

1. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах: учебное пособие / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544632> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.

9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)

9.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: <http://kchgu.ru>.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: <https://do.kchgu.ru>.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 249 эбс от 14.05.2025 г. Электронный адрес: https://znanium.com	от 14.05.2025г. до 14.05.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 10 от 11.02.2025 г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	от 11.02.2025г. до 11.02.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22.02.2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Электронный ресурс Polpred.comОбзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащённости аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащённости образовательного процесса по адресу: <https://kchgu.ru/sveden/objects/>

9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения

- MicrosoftWindows (Лицензия № 60290784), бессрочная
- MicrosoftOffice (Лицензия № 60127446), бессрочная
- ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
- CalculateLinux (внесён в ЕРПП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
- Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная

- Kaspersky Endpoint Security (Лицензия № 280E-210210-093403-420-2061), с 25.01.2023 г. по 03.03.2025 г.
- Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г.

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» - <https://edu.ru/documents/>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru/>
3. Базы данных Scopus издательства Elsevir <http://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - <http://fgosvo.ru>.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – <http://edu.ru>.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru>.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – <http://window/edu.ru>.

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «[Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ](#)», размещенным на сайте Университета по адресу: <http://kchgu.ru>.

11. Лист регистрации изменений

Изменение	Дата и номер протокола ученого совета факультета/института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений в ОП	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения в ОП
<p>Переутверждена ОП ВО. Обновлено:</p> <p>учебный план, календарный учебный план, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания календарный план воспитательной работы.</p> <p>Обновлены договоры:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. На антивирус Касперского. (Договор №56/2023 от 25 января 2023г.). Действует до 03.03.2025г. 2. Договор №915 ЭБС ООО «Знаниум» от 12.05.2023г. Действует до 15.05.2024г. 3. Договор №36 от 14.03.2024г эбс «Лань». Действует по 19.01.2025г. 4. Договор №238 ЭБС ООО «Знаниум» от 23.04.2024г. Действует до 11 мая 2025г. 	<p style="text-align: center;">23.05.2024г. протокол №10</p>	<p style="text-align: center;">29.05.2024г. протокол №8</p>
<p>Переутверждена ОПВО. Обновлено:</p> <p>учебный план, календарный учебный график, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания, календарный план воспитательной работы.</p> <p>Обновлены договоры:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. На антивирус Касперского. (Договор №56/2023 от 25 января 2023г.). Действует до 03.03.2025г. 2. На антивирус Касперского. (Договор № 0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Действует по 07.03.2027г. 3. Договор № 10 от 11.02.2025г. эбс «Лань». Действует по 11.02.2026г. 4. Договор № 238 эбс ООО «Знаниум» от 23.04.2024г. Действует до 11 мая 2025г. Договор № 249-эбс ООО «Знаниум» от 14.05.2025г. Действует до 14.05.2026г. 	<p style="text-align: center;">29.04.2025г., протокол № 8</p>	<p style="text-align: center;">30.04.2025г., протокол № 8</p>